ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ В.И. МИРОНЕНКО

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \quad (t,x) \in D \subset R^{n+1}. \tag{1}$$

Отображение $\Pi_{[t_0;t_0+T]}(x) := \varphi(t_0+T, t_0, x_0)$ называют отображением (оператором) сдвига вдоль решений системы (1). В случае, когда система (1) $2\omega-$ периодична по t, оператор $\Pi_{[t_0;t_0+T]}$ называют отображением за период $[t_0; t_0+T]$ или отображением Пуанкаре. При этом, как правило, считают $t_0 = 0$. Мы, изменяя традиции, считаем $t_0 = -\omega$. Поэтому для нас отображение за период принимает симметричный вид $\Pi_{[-\omega;\omega]}(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$. Отсюда легко перейти к функции $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$, названной мною отражающей функцией. Дадим ее точное определение. Для этого зафиксируем x и рассмотрим множество всех тех τ, для которых непродолжаемое решение $\varphi(t;\tau,x)$ существует при всех t из промежутка $(-|\tau|;|\tau|)$. Для таких τ, положим

$$\alpha_x := min\{inf\{\tau\}, sup\{\tau\}\}, J(x) = (-\alpha_x, \alpha_x), D = \{(t,x) : x \in R^n, t \in J_x\}.$$

Определение 1. Отражающей функцией *системы (1) назовем функцию $F : D \to R^n$, определяемую формулой $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$.*

Для отражающей функции справедливы следующие **свойства:**

1. Для любого решения $x(t)$, $t \in J_{x(0)}$ системы (1) верно тождество

$$F(t, x(t)) \equiv x(-t).$$

2. Для отражающей функции F любой системы выполнены тождества

$$F(-t, F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x. \tag{2}$$

3. Дифференцируемая функция $F : D \to R^n$ будет отражающей функцией системы (1) с непрерывно дифференцируемой правой частью тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0, F(0,x) \equiv x. \tag{3}$$

4. Пусть решение $x(t)$ системы (1) определено по крайней мере на полуинтервале $[0;\alpha)$, а дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая основному соотношению (3) определена во всех точках $(t, x(t)), t \in [0;\alpha)$. Тогда это решение $x(t)$ определено и на интервале $(-\alpha; 0)$ и при этом $x(t) = F(-t, x(-t))$ при $t \in (-\alpha; 0)$.

Лемма 1 (Основная лемма). *Пусть правая часть системы (1) 2ω-периодична по t, а решения системы (1) однозначно определяются своими начальными данными. Тогда отображение за период для системы*

(1) можно найти по формуле $\varphi(\omega; -\omega, x) = F(-\omega; x)$ и поэтому решение $\varphi(t; -\omega, x_0)$ системы (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда x_0 есть решение недифференциальной системы $F(-\omega, x) = x$.

В качестве следствия получаем следующее

Утверждение 3.4. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция $X(t, x)$ 2ω-периодична и нечетна по t, т. е.*

$$X(t + 2\omega, x) \equiv X(t, x) \text{ и } X(-t, x) \equiv -X(t, x).$$

Тогда всякое продолжимое на отрезок $[-\omega, \omega]$ решение системы (1) будет 2ω-периодическим и четным по t.

Как следует из основной леммы, знание отражающей функции 2ω-периодической системы вида (1) позволяет определить отображение за период такой системы и, значит, найти начальные данные ее периодических решений и исследовать эти решения на устойчивость. Не интегрируемая в квадратурах система может иметь в качестве своей отражающей функции элементарную функцию. В самом деле, для любой не интегрируемой в квадратурах системы вида (1), для которой $X(0, x) = 0$, можно построить систему

$$\dot{x} = \begin{cases} X(t, x) & \text{при } t \geqslant 0 \\ -X(-t, x) & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

с нечетной по t правой частью. Эта система не интегрируема в квадратурах, а ее отражающая функция задается формулой $F(t, x) \equiv x$. Сказанное выше иллюстрирует уравнение Риккати $\dot{x} = (x^2 + \cos^2 t) \sin t$ с отражающей функцией $F(t, x) \equiv x$. Здесь ситуация напоминает ситуацию с интегрирующим множителем с той разницей, что знание решения основного соотношения позволяет найти не решение самой системы, а ее отображение за период $[-\omega; \omega]$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть все решения системы (1) 2ω-периодичны и однозначно определяются своими начальными данными. Тогда отражающая функция $F(t, x)$ этой системы 2ω-периодична по t.*

Теорема 2. *Пусть система (1) 2ω-периодична по t, а ее решения однозначно определяются своими начальными данными и существуют при всех $t \in [-2\omega, 2\omega]$. Если, кроме того, отражающая функция этой системы 2ω-периодична по t, то все решения системы (1) периодичны с периодом 4ω.*

Аналогичная теорема имеет место в том случае, когда не все решения системы (1) продолжимы на отрезок $[-2\omega, 2\omega]$. При этом заключение о 4ω-периодичности можно сделать лишь для тех решений, которые существуют при всех $t \in [-2\omega, 2\omega]$.

Из ω-периодичности отражающей функции следует 2ω-периодичность всех продолжимых на $[-\omega, \omega]$ решений периодической системы (1). Из

2ω-периодичности отражающей функции не следует, вообще говоря, 2ω-периодичность решений 2ω-периодической системы, хотя следует их 4ω-периодичность.

Не следует думать, что если все решения 2ω-периодической системы 2ω-периодичны, то ее отражающая функция обязана быть ω-периодической. Этому противоречит пример уравнения $\dot{x} = x\cos t$.

В случае, когда $n = 1$,, т.е. когда система (1) вырождается в уравнение, верна

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) 2ω-периодично по t, а его решения однозначно определяются своими начальными данными и существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда для того, чтобы все решения уравнения (1) были 2ω-периодичны, необходима и достаточна 2ω-периодичность по t отражающей функции этого уравнения.*

Лемма 2. *Для всякой непрерывно дифференцируемой функции $F : D \to \mathbf{R}^n$, для которой выполнены тождества (2), имеют место соотношения*

$$F_x(-t, F(t,x)) \equiv F_x^{-1}(t,x), F_t(-t, F(t,x)) \equiv F_x^{-1}(t,x)F_t(t,x).$$

Теорема 4. *Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F : D \to R^n$, определенной в симметричной области D, содержащей гиперплоскость $t = 0, x \in R^n$, для которой выполнены тождества (2), существует дифференциальная система $\dot{x} = -0.5F_x(-t,F)F_t$, $(t,x) \in D$, с непрерывно дифференцируемой правой частью, отражающая функция которой совпадает с $F(t,x)$.*

Теорема 5. *Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F : D \to \mathbf{R}^n$, определенной в области $D \subset \mathbf{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t = 0$, для которой выполнены тождества (2), при всех $x \in \mathbf{R}^n$ и достаточно малых $|t|$ существует дифференциальная система*

$$\dot{x} = -[F_x + E]^{-1}F_t,$$

отражающая функция которой совпадает с $F(t,x)$, а общий интеграл задается формулой $F(t,x) + x = c = \mathrm{const}$.

Следствие. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $F : D \to \mathbf{R}^n$ является отражающей функцией хотя бы одной дифференциальной системы тогда и только тогда, когда для нее выполнены тождества (2).*

Системы, существование которых гарантируется теоремами 4 и 5, называются соответственно **простой** и **простейшей**.

Теорема 6. *Пусть $\Phi : G \to \mathbf{R}^n$ есть отражающая функция некоторой дифференциальной системы, решения которой однозначно определяются своими начальными данными, а для непрерывно дифференцируемой функции $F : D \to \mathbf{R}^n$ выполнены тождества (2). Тогда для того,* *чтобы в области $D \cap G$ функция Φ совпадала с F, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемая система имела вид*

$$\dot{x} = -(F_x + E)^{-1} F_t + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t,F),$$

или вид

$$\dot{x} = -0.5 F_x(-t,F)[F_t + R_1(t,x)] - R_1(-t,F),$$

где $R : D \cap G \to \mathbf{R}^n$ есть некоторая непрерывная вектор-функция.

Теорема 7. *Каковы бы ни были непрерывно дифференцируемая функция $S(t,x)$ и функция $U(t,x)$, для которой $\det U_x \neq 0$, отражающая функция системы*

$$\dot{x} = U_x^{-1}(t,x)[S(t,U(t,x)) - S(-t,U(t,x)) - U_t(t,x)]$$

задается соотношением $U(-t,F) = U(t,x)$.

Будем говорить, что множество систем вида (1) образует класс эквивалентности, если существует дифференцируемая функция $F : D \to \mathbf{R}^n$ со свойствами:

1) Отражающая функция $\Phi : G \to \mathbf{R}^n$ любой системы из рассматриваемого множества совпадает в своей области определения G с функцией F;

2) Любая система вида (1), отражающая функция $\Phi : G \to \mathbf{R}^n$ которой совпадает в области $G \cap D$ с функцией F, содержится в рассматриваемом множестве.

Две системы вида (1), принадлежащие одному классу эквивалентности, будем называть эквивалентными. Допуская определенную вольность речи, будем говорить также, что они имеют одну и ту же отражающую функцию. Функцию F при этом будем называть отражающей функцией класса, а класс — соответствующим отражающей функции F.

Из третьего свойства отражающей функции следует, что система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,y), \quad t \in R^n, \quad y \in R^n, \tag{4}$$

принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0, \\ F_t + F_x Y(t,x) + Y(-t,F) = 0, \\ F(0,x) = x \end{cases} \tag{5}$$

совместна.

Необходимым условием совместности этой системы является тождество $X(0,x) \equiv Y(0,x)$.

При решении вопроса о совместности системы (5) целесообразно использовать теорему Фробениуса. При $n = 1$ вопрос об эквивалентности двух уравнений легко решается до конца.

Теорема 8. *Пусть система (1) с 2ω–периодической по t правой частью и система (4) принадлежат одному классу эквивалентности, а их решения существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда между 2ω–периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (7) можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Следствие. *Пусть система (1) с 2ω-периодической по t правой частью и система (7) принадлежат одному классу эквивалентности, а их решения существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда каждому 2ω–периодическому решению $\psi(t; -\omega, x)$, вообще говоря, непериодической системы (4) соответствует 2ω–периодическое решение $\varphi(t; -\omega, x)$ системы (1).*

Теорема 9. *Все системы класса эквивалентности, содержащего систему(1) с продолжимыми на* $\mathbf{R}$ *решениями, можно записать в виде*

$$\dot{x} = X(t, x) + F_x^{-1} R(t, x) - R(-t, F), \tag{6}$$

где F–отражающая функция системы (1), а R–произвольная функция со значениями в $\mathbf{R}^n$, *но такая, что решения системы (6) однозначно определяются своими начальными данными.*

Теорема 10. *Пусть система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе. Тогда она эквивалентна системе $\dot{x} = X(0, x)$. Эта система—единственная стационарная система в классе эквивалентности, содержащем систему (1).*

Следствие. *Линейная система $\dot{x} = P(t)x$ с непрерывной матрицей $P(t)$ эквивалентна некоторой стационарной системе тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$P(-t) + e^{-2P(0)t} P(t) e^{2P(0)t} \equiv 2P(0).$$

Отображение за период $[-\omega, \omega]$ такой системы (с непрерывной 2ω– периодичной матрицей $P(t)$), задается формулой $T(x) = e^{2P(0)\omega} x$.

Теорема 11. *Пусть система $\dot{x} = f(t, x)$ является простейшим представителем класса эквивалентности, соответствующего отражающей функции F. Тогда $f(-t, F(t, x)) \equiv f(t, x)$.*

Эта теорема позволяет распознавать простейшие системы. Пусть нам, например, задана некоторая система вида (1). Для того, чтобы определить, является ли она простейшей, составим систему недифференциальных уравнений $X(-t, y) = X(t, x)$, и определим, хотя бы и в неявном виде, дифференцируемое решение $y = F(t, x)$ этой системы, удовлетворяющее условию $F(0, x) \equiv x$. Если это решение $F(t, x)$ удовлетворяет основному соотношению для отражающей функции, то рассматриваемая система является простейшей, а $F(t, x)$ является ее отражающей функцией. Если же эта система не имеет такого решения F, она не является простейшей.

При изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у данной дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной. Задача отыскания простейшей системы, эквивалентной данной, как следует из сказанного ранее, равносильна задаче построения отражающей функции. В самом деле, если нам известна отражающая функция изучаемой системы,то мы можем построить простейшую систему, эквивалентную данной. С другой стороны, если нам известна простейшая система, то мы можем построить отражающую функцию этой простейшей системы, которая будет являться отражающей функцией изучаемой системы. Теорема 10 показывает, однако, что иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда отражающая функция неизвестна. В том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет простая система

$$\dot{x} = -0.5F(-t,F)F_t \equiv -0.5F_x^{-1}F_t =: S(t,x).$$

Ниже приводятся несколько предложений, которые помогут нам ответить на вопрос: является данная нам система вида (1) простой или нет?

Лемма 3. *Система $\dot{x} = X(t,x)$ является простой тогда и только тогда, когда для ее отражающей функции выполнено соотношение*

$$F_x X(t,x) = X(-t,F).$$

Лемма 4. *Всякая стационарная система, решения которой однозначно определяются своими начальными данными, является простой.*

Теорема 12. *Для простой системы размерности n, правая часть $S(t,x)$ которой n раз непрерывно дифференцируема, справедливы следующие соотношения:*

$$F_t = 2S(-t,F);\;\; F_x S(t,x) + S(-t,F);$$

$$F_x \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial S}{\partial t}(-t,F); F_x \frac{\partial^m S}{\partial t^m}(t,x) = A_m(-t,F), m \in \mathbf{N},$$

где $A_1(t,x) := -\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)$ и все остальные A_m выражаются через $S(t,x)$ и ее частные производные.

Следствие. *Пусть для простой системы матрица*

$$[S, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} S}{\partial t^{n-1}}]$$

невырождена. Тогда для отражающей функции этой системы верно тождество

$$[A_0(-t,F), \ldots, A_{n-1}(-t,F)][S, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} S}{\partial t^{n-1}}]^{-1} \frac{\partial^n S}{\partial t^n} \equiv A_n(-t,F).$$

Теорема 13. *Для всякого простого уравнения справедливо тождество*

$$S(-t,F)\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)+S(t,x)\frac{\partial S}{\partial t}(-t,F)\equiv 0\ \forall (t,x).$$

Теорема 14. *Система $\dot{x}=S(t)x$ с дифференцируемой матрицей $S(t)$ удовлетворяющей соотношению $\dot{S}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(t)S^k$, где m – произвольное натуральное число, а $\alpha_k(t)$ – непрерывные нечетные скалярные функции, является простой.*

Рассмотрим систему (1). Будем считать, что X и $\frac{\partial X}{\partial x}$ непрерывны в $\mathbf{R}^{1+n}$, и $X(t+2\omega,x)\equiv X(t,x)$. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{z}=\frac{X(t,z)-X(-t,z)}{2}. \tag{7}$$

Предположим дополнительно, что каждое решение $z(t;\tau,z_0)$ этой системы продолжимо на $[-\omega,\omega]$. Тогда это решение будет продолжимо и на все $\mathbf{R}$.

Поскольку правая часть системы (7) нечетна по t, то согласно см. утверждению 3.4 каждое решение системы (7) четно и 2ω- периодично.

В системе (1) сделаем замену переменных $x=z(t;-\omega,y)$. Тогда получим систему

$$\dot{y}=\left[\tfrac{\partial z}{\partial y}(t;-\omega,y)\right]^{-1}\times[X(t,z(t;-\omega,y))+X(-t,z(t;-\omega,y))]/2. \tag{8}$$

Как показывает проверка, правая часть системы (8) четна по t.

Через $\varphi(t;\tau,x)$ будем обозначать решения системы (1), а через $\psi(t;\tau,y)$—решения системы (8).

Теорема 15. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция $X(t,x)$ 2ω-периодична по t, а каждое решение системы (7) определено при всех $t\in[-\omega,\omega]$. Тогда существует система (8) с четной по t правой частью, отображение Пуанкаре которой совпадает с отображением Пуанкаре системы (1), т. е. справедливо тождество $\varphi(\omega;-\omega,x)\equiv\psi(\omega;-\omega,x)$.*

В том случае, когда система (7) интегрируется в квадратурах или элементарных функциях, система (8) для системы (1) может быть построена эффективным образом. Такой случай представится, например, для системы (1) вида $\dot{x}=a(t)Ax+b(t)+X_1(t,x)$, где $X_1(t,x)$—четная по t вектор-функция, A–постоянная матрица, $a(t)$—произвольная непрерывная скалярная функция, $b(t)$—непрерывная вектор-функция. В этом случае система (7) принимает вид $\dot{z}=a_{\text{н}}(t)Az+b_{\text{н}}(t)$.

Определение 2. *Дифференцируемую, 2ω-периодичную по t функцию $A(t,x)\equiv A_t(x)$, $A:\mathbf{R}^{1+n}\to\mathbf{R}^n$, для которой при каждом $t\in\mathbf{R}$ функция $A_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ есть диффеоморфизм, назовем* **ω-диффеоморфизмом**.

Определение 3. *Отражающие функции* $F(t,x) \equiv F_t(x)$ *и* $\Phi(t,x) \equiv \Phi_t(x)$ *назовем* ω**-подобными**, *если существует* ω*-диффеоморфизм* A_t, *для которого* $\Phi_t = A_{-t} \circ F_t \circ A_t^{-1}$.

Определение 4. *Дифференциальные* 2ω*-периодичные по* t *системы (1) и (7) назовем* ω**-эквивалентными**, *если их отражающие функции* ω*-подобны.*

Теорема 16. *Системы (1) и (7), все решения которых продолжимы на* $\mathbf{R}$, ω*-эквивалентны тогда и только тогда, когда их отображения Пуанкаре подобны.*

Следствие 1. *Если* 2ω*-периодические системы (1) и (7)* ω*-эквивалентны, то между периодическими решениями этих систем можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Следствие 2. *Для того, чтобы* 2ω*-периодическая система (1) с продолжимыми на* $[-\omega,\omega]$ *решениями имела только* 2ω*-периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы она была* ω*-эквивалентна системе* $\dot{x} = 0$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \quad ,t \in \mathbf{R}, \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{9}$$

с непрерывной матрицей $P(t)$. Пусть $X(t)$ есть фундаментальная матрица решений этой системы. Тогда ее общее решение системы можно записать в виде $\varphi(t;\tau,x) = X(t)X^{-1}(\tau)x$. Поэтому отражающая функция рассматриваемой системы линейна и имеет вид

$$F(t,x) = F(t)x, \quad F(t) := X(-t)X^{-1}(t).$$

Определение 5. *Матрицу* $F(t), \quad F(t) := X(-t)X^{-1}(t)$ *будем называть* **отражающей матрицей** *системы (9).*

Заметим, что условия теоремы не обеспечивают коммутацию матрицы со своим интегралом.

Из свойств отражающей функции и предыдущих результатов вытекают соответствующие свойства отражающей матрицы и соответствующие результаты для линейных систем. Приведем здесь один из таких результатов.

Теорема 17. *Пусть для непрерывной на* $\mathbf{R}$ 2ω*-периодической матрицы* $P(t)$ *выполнено тождество*

$$P(t)\int_0^t [P(\tau) + P(-\tau)]d\tau \equiv \int_0^t [P(\tau) + P(-\tau)]d\tau P(t).$$

Тогда отображение за период для системы (9) задается формулой

$$\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv exp(\int_0^\omega [P(\tau) + P(-\tau)]d\tau)x.$$

При этом система (9) асимптотически устойчива, если для всех корней λ_k *уравнения*

$$det\left[\int_0^\omega [P(\tau)+P(-\tau)]d\tau-\lambda E\right]=0$$

выполнено неравенство $Re\lambda_k<0$. *Система (9) неустойчива, если хотя бы для одного корня* $Re\lambda_k>0$.

Заметим, что условия теоремы не обеспечивают коммутацию матрицы со своим интегралом.

Альсевич Л. А. показала, что отражающую матрицу любой системы вида (9) можно записать в виде $F(t)=e^{S(t)}$, где $S(t)$ есть некоторая дифференцируемая нечетная матрица. В ее же работах указаны различные случаи, когда для линейной системы вида (9), а также для систем с квадратичными правыми частями отражающая функция может быть построена в явном виде.

Теория отражающей функции применяется и к уравнению Риккати

$$\dot{x}=a(t)+b(t)x+c(t)x^2. \tag{10}$$

В частности, установлено, что отражающая функция уравнения Риккати представляет собой дробно-линейную функцию x. Отсюда получаем

Утверждение. *Для уравнения (10) с* 2ω*-периодическими непрерывными коэффициентами имеет место лишь один из следующих случаев:*

1) уравнение (10) не имеет периодических решений;

2) уравнение (10) имеет только одно 2ω*-периодическое решение;*

3) уравнение (10) имеет ровно два 2ω*-периодических решения;*

4) все решения уравнения (10), определенные на отрезке $[-\omega;\omega]$, *являются* 2ω*–периодическими.*

Примером одной из доказанных теорем может служить

Теорема 18. *Пусть непрерывные* 2ω*-периодические коэффициенты уравнения (10) удовлетворяют условиям*

$$b(t)\cos 2\int_0^t a_{ч}(\tau)d\tau\equiv[a(t)-c(t)]\sin 2\int_0^t a_{ч}(\tau)d\tau,\ c_{ч}(t)\equiv a_{ч}(t).$$

Тогда, если $2\int\limits_0^\omega a_{ч}(\tau)d\tau=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, *то любое продолжимое на* $[-\omega;\omega]$ *решение уравнения (10) будет* 2ω*-периодическим. Если же* $2\int\limits_0^\omega a_{ч}(\tau)d\tau\neq k\pi$, *то уравнение (10) не имеет* 2ω*-периодических решений.*

В параграфе 3.9 выделены все те уравнения первого порядка, для которых отражающая функция линейна. Она с необходимостью имеет вид $F(t,x)=xe^{2m(t)}+n(t)e^{m(t)}$.

Например, уравнение вида $\dot{x} = a(t) + b(t)cosx + c(t)sinx$ с непрерывными коэффициентами имеет линейную отражающую функцию тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$b(t) + b(-t)cos\alpha(t) + c(-t)sin\alpha(t) \equiv 0;$$

$$c(t) - b(-t)sin\alpha(t) + c(-t)cos\alpha(t) \equiv 0,$$

где $\alpha(t) = -\int_0^{\text{e}}[a(\tau) + a(-\tau)]$. При этом отражающая функция рассматриваемого уравнения задается формулой $F(t, x) = x + \alpha(t)$.

Примером уравнений такого вида является уравнение

$$\dot{x} = a(t) + b(t)sin\alpha(t)cosx + b(t)cos\alpha(t) - b(-t)sinx,$$

в котором $a(t), b(t)$ — произвольные непрерывные функции, а $\alpha(t)$ имеет вид, определенный выше.

Теорема 19. *Уравнение Риккати (10) с непрерывными коэффициентами имеет отражающую функцию вида $F(t, x) = M(t)x$ тогда и только тогда, когда нечетны функции*

$$a(t)exp(-\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau); c(t)exp(\int_0^x b_{\text{ч}}(\tau)d\tau),$$

где $2b_{\text{ч}} := b(t) + b(-t)$. При этом $F(t, x) = xexp(-2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau)$.

Если уравнение

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + ... + a_r(t)x^{(r)} \tag{11}$$

с непрерывными на множестве действительных чисел коэффициентами имеет линейную отражающую функцию вида $F = xe^{2m} + ne^m$, то $a_r = \alpha e^{(r-1)m}$, где $\alpha = \mp\sqrt{-a_r(t)a_r(-t)}signt$ есть нечетная функция. Это обстоятельство позволяет определить не только $\alpha(t)$, но и $m(t) = \frac{1}{r+1}ln\frac{a_r(t)}{\alpha(t)}$. Тогда функция $n(t)$ найдется из соотношения

$$a_{r-1}(t) + e^{2(r-2)m(t)}[a_{r-1}(-t) + ra_r(-t)n(t)e^{m(t)}] = 0.$$

Проверка основного соотношения для отражающей функции покажет, является построенная функция $F(t, x) = x^{2m(t)} + n(t)^{m(t)}$ отражающей функцией уравнения (11) или нет.

Отметим, что аналогичные рассмотрения можно проводить для систем дифференциальных уравнений. В каждом конкретном случае для систем невысокой размерности не составит особого труда найти линейную по x функцию, "подозрительную"на отражающую. Проверка основного соотношения покажет, является эта линейная функция отражающей функцией рассматриваемой нелинейной системы или нет.

Мы рассмотрели случай линейной (точнее было бы сказать, аффинной) отражающей функции, и убедились в том, что мы всегда можем установить, является отражающая функция рассматриваемой дифференциальной системы линейной или нет. Причем, если сама система нелинейна, то мы получим еще и дополнительную информацию о ее линейной отражающей функции. При этом, если отражающая функция линейна в узком смысле, т.е. имеет вид $F(t,x) = F(t)x$, где $F(t)$ – отражающая матрица, изучение вопроса значительно облегчается. По просьбе автора П.П. Вересович изучил этот случай подробнее. Результаты этого изучения изложены в его работах. Если отражающая функция системы (1) линейна, то эта отражающая функция является также и отражающей функцией линейной системы $\dot{x} = \frac{\partial X}{\partial x}(t,0)x$, а для отражающей матрицы выполнено недифференциальное тождество

$$F(t)[X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,0)] + [X(-t,F(t))x - \frac{\partial X}{\partial x}(-t,0)] \equiv 0.$$

В том случае, когда $X(t,x)$ аналитична по переменным x, выписанное тождество, как нетрудно показать, рассыпается на ряд алгебраических по x однородных тождеств. Это обстоятельство позволяет определить элементы матрицы $F(t)$, используя системы компьютерной алгебры.

Высокая размерность системы дифференциальных уравнений часто является большим препятствием при изучении этой системы. В том случае, когда система распадается на отдельные независимые подсистемы, ее исследование значительно облегчается. Аналогичным образом изучение 2ω -периодической по t системы размерности $m+n$ вида

$$\dot{x} = f(t,x,y), \quad \dot{y} = g(t,x,y), x \in D_1 \subset \mathbf{R^n},\ y \in D_2 \subset \mathbf{R^n},\ t \in \mathbf{R}, \qquad (12)$$

с однозначно определяемыми своими начальными данными решениями $\varphi(t;t_0,x_0,y_0)$, $\psi(t;t_0,x_0,y_0)$ значительно облегчается, если ее отображение за период

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(\omega;-\omega,x,y) \\ \psi(\omega;-\omega,x,y), \end{pmatrix}$$

распадается на два независимых отображения $x \mapsto \varphi_1(\omega;-\omega,x)$ и $y \mapsto \psi_1(\omega;-\omega,y)$, являющихся отображениями за период независимых систем вида

$$\dot{x} = f_1(t,x), \dot{y} = g_1(t,y), \qquad (13)$$

размерностей m и n соответственно, т. е. если

$$\varphi(\omega;-\omega,x,y) \equiv \varphi_1(\omega;-\omega,x),\ \psi(\omega;-\omega,x,y) \equiv \psi_1(\omega;-\omega,y).$$

Эти тождества будут наверняка выполнены, если отражающая функция системы (12) совпадает с отражающей функцией системы (13).

Теорема 20. *Пусть система (12) имеет такую же отражающую функцию, как и распавшаяся система (13). Тогда* $f(0,x,y)\equiv f_1(0,x)$ *не зависит от* y, *а* $g(0,x,y)\equiv g_1(0,y)$ *не зависит от* x.

Теорема 21. *Пусть существует стационарное преобразование* $u = u(x,y), v = v(x,y)$, *преобразующее систему* $\dot u = A(t,u,v)$, $\dot v = B(t,u,v)$ *в систему (12), отражающая функция которой совпадает с отражающей функцией некоторой системы (13). Тогда это же преобразование преобразует систему* $\dot u = A(0,u,v)$, $\dot v = B(0,u,v)$ *в распадающуюся систему* $\dot x = f(0,x,y)\equiv f_1(0,x)$, $\dot y = g(0,x,y)\equiv g_1(0,y)$.

Теорема 22. *Пусть*

1) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *– нечетные скалярные* 2ω *-периодические функции;*

2) $A(t), D(t)$ *– непрерывные,* $B(t), C(t)$ *– дифференцируемые* 2ω *-периодические матрицы размерностей* $m\times m$, $n\times n$, $m\times n$, $n\times m$ *соответственно, для которых выполнены тождества* $\dot B = AB - BD$; $\dot C = DC - CA$. *Тогда матрица монодромии системы*

$$\dot z = \begin{pmatrix} A(t) & \alpha(t)B(t) \\ \beta(t)C(t) & D(t) \end{pmatrix} z$$

на периоде $[-\omega;\omega;]$ *совпадает с матрицей монодромии на том же периоде распадающейся системы* $\dot x = A(t)x, \quad \dot y = D(t)y$.

Теорема 23. *Пусть*

1) система (13) является простой;

2) производная в силу системы

$$\dot x = f_1(t,x)(1+M(t,v)),\ \dot y = g_1(t,y)(1+N(t,v)) \tag{14}$$

от функции $v = v(t,x,y)$ *имеет вид*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f_1(t,x)\,(1+M) + \frac{\partial v}{\partial y} g_1(t,y)\,(1+N) \equiv A(t,v),$$

где $A(t,v)$ *- нечетная по* t *функция;*

3) функции $M(t,v)$ *и* $N(t,v)$ *-нечетны по* t.

Тогда отражающая функция системы (14), а значит, и ее отображение за период, совпадают соответственно с отражающей функцией и с отображением за период системы (13).

Рассмотрим теперь систему

$$\dot z = Z(t,z),\ t\in\mathbf{R},\ z\in D_0\subset \mathbf{R^k} \tag{15}$$

размерности $k = m + n$. Пусть чувство, приходящее к исследователю, возможно не из математических (а например, из физических) соображений, подсказывает, что отображение за период для рассматриваемой системы распадается на отображения за период некоторых систем вида (13), которые исследователю заранее не известны. Тогда естественно записать систему (15) в виде (12). Для этого вычислим $Z(0,z)$. Если $Z(0,z)$ не распадается на независимые подсистемы, то система (15) не может быть быть записана в виде (13). В противном случае мы получаем указание на то, как записать систему (13) по системе (15). Проверка условий теоремы 23 позволит нам либо убедиться в несостоятельности наших ожиданий, либо укрепиться в нашей вере. Если отражающая функция системы (12) действительно распадается на $F(t,x)$ и $\Phi(t,y)$, то основное соотношение для отражающей функции позволит нам установить это.

Рассмотрим теперь наряду с системой (1) системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -X(-t,\bar{x}), \tag{16}$$

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = -X(-t,\bar{x}), \tag{17}$$

Пусть $x(t)$ есть решение системы (1). Тогда, в чем можно убедиться проверкой, функция $\bar{x}(t) := x(-t)$ является решением системы (16). Система (16), как следует из основного соотношения для отражающей функции, может быть получена из системы (1) заменой переменных $\bar{x} = F(t,x)$, где F есть отражающая функция системы (1), а множество

$$M := \{(t,x,\bar{x}) : x = F(t,x) \tag{18}$$

является интегральным многообразием системы (16). Таким образом, получена

Лемма 5. *Дифференцируемая функция $F(t,x)$ задает отражающую функцию системы (1) тогда и только тогда, когда (18) есть интегральное многообразие системы (17), сечение которого гиперплоскостью $t=0$ представляет собой плоскость $t=0,\ \bar{x}=x$.*

Эта лемма позволяет сформулировать многие из предыдущих теорем на языке интегральных многообразий и придать им геометрический смысл.

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \Delta(t,x), \quad t \in R,\ x \in D \subset R^n. \tag{19}$$

Будем считать, что $\Delta(t,x)$, как и $X(t,x)$, есть 2ω -периодическая по t, непрерывно дифференцируемая функция. Пусть система (1) имеет отражающую функцию $F(t,x) = (F_1(t,x),\ \dots\ , F_n(t,x))^{\mathrm{T}}$, для которой $F(\omega,x) \equiv x$ при всех $x \in D$. Тогда все продолжимые на $[-\omega,\ \omega]$ решения системы (1) будут 2ω -периодичны. Для $m \leqslant n$ определим множество

$$M_s := \{(t,x,\bar{x}) : \bar{x}_i < F_i(t,x), i = \overline{1,s}; \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}} > F_k(t,x), k = \overline{(s+1),m}\}.$$

Границей множества M_s является множество Γ_s, которое характеризуется тем, что хотя бы для одного $j \in \{1,2,...,m\}$ выполнено равенство $\bar{x}_j = F_j(t,x)$. Множества M_s и Γ_s не имеют общих точек. Положим $\hat{x}_j := (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{j-1}, F_j(t,x), \bar{x}_{j+1}, ..., \bar{x}_n)$.

Теорема 24. *Пусть:*

1) функция $F = (F_1, ..., F_n)^{\mathrm{T}}$ *есть отражающая функция системы (1) и* $F(\omega, x) \equiv x$ *при всех* $x \in D$*;*

2) для 2ω *-периодической по* t *системы (19) выполнены неравенства*

$$X_i(-t, \hat{x}_i) - X_i(-t, F(t,x)) + \frac{\partial F_i}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) + \Delta_i(-t, \hat{x}_i) > 0,$$

$$X_k(-t, \hat{x}_k) - X_k(-t, F(t,x)) + \frac{\partial F_k}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) + \Delta_k(-t, \hat{x}_k) < 0$$

при $t \in]0,\ \omega[$; $\quad (t, x, \hat{x}) \in \Gamma_s$; $\quad i = \overline{1, s}$; $\quad k = \overline{(s+1), m}$. *Тогда система (19) не имеет* 2ω *-периодических решений и для любого решения* $x(t)$ *этой системы точка* $A := (\omega, x(\omega), x(\omega)) \in M_s$.

Теорема 25. *Пусть для* 2ω *-периодичной по* t *системы (1) при некотором* s *выполнены неравенства*

$$X_i(t,x) + X_i(-t, \hat{x}_i) > 0, i = \overline{1, s},$$
$$X_k(t,x) + X_k(-t, \hat{x}_k) < 0, k = \overline{(s+1), n},$$
$$t \in]0, \omega[, (t, x, \hat{x}) \in \Gamma_s,$$
$$\hat{x}_i := (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n).$$

Тогда система (1) не имеет 2ω *-периодических решений и* $x_i(-\omega) < x_i(\omega)$ *при* $i = \overline{1, s}$, *а* $x_k(-\omega) > x_k(\omega)$ *при* $k = \overline{(s+1), n}$.

При $n = 1$ теорема 25 утверждает, что если для уравнения (1) при $t \in]0,\ \omega[$ и любом x выполнено неравенство

$$X(t,x) + X(-t,x) \neq 0,$$

то уравнение (1) не имеет 2ω -периодических решений. При этом если $X(t,x) + X(-t,x) > 0$, то $x(-\omega) < x(\omega)$, если же $X(t,x) + X(-t,x) < 0$, то $x(-\omega) > x(\omega)$.

Следствие. *Пусть для* 2ω *-периодической по* t *системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + \Delta_i(t,x), \quad t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R^n},\ i = \overline{1, n},$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью выполнены условия:

1) функции $\Delta_i(t,x), i = \overline{l, n}$, *не обращаются в нуль;*

2) функции $p_{ij}(t)$ *нечетны и для них при* $t \in]0,\ \omega[$ *выполнены неравенства* $p_{ij}(t) sign\Delta_i sign\Delta_j > 0$.

Тогда рассматриваемая система не имеет 2ω *-периодических решений и* $(x_i(\omega) - x_i(-\omega)) sign\ \Delta_i > 0$.

Несмотря на то, что теоремы 24 и 25 устанавливают условия отсутствия периодических решений, их можно использовать для доказательства существования периодических решений.

Теорема 26. *Пусть при* $n = 1$ *и некотором* $\alpha > 0$ 2ω *-периодическая по* t *и непрерывно дифференцируемая функция* $X(t, x)$ *удовлетворяет неравенствам:*

$X(t, x) + X(-t, x) < 0$ *при* $t \in]0,\ \omega[\ ,\ x \geqslant \alpha,$

$X(t, x) + X(-t, x) > 0$ *при* $t \in]0,\ \omega[\ ,\ x \leqslant -\alpha.$

Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно 2ω *-периодическое решение.*

Ранее использовалось понятие отражающей функции системы (1), отражающей свойства всех решений этой системы. При дальнейшем рассмотрении вопросов использования понятия отражающей функции стала ясной необходимость расширения этого понятия таким образом, чтобы оно относилось не только ко всему семейству решений системы (1), но, может быть, и к некоторому его подсемейству. Так возникло следующее

Определение 6. *Пусть задано семейство вектор-функций*

$$\begin{gathered} x = \varphi(t, c),\ x^T = (x_1, \ldots, x_n),\ c = (c_1, \ldots, c_m) \in G, \\ t \in (-\alpha;\ \alpha),\ \alpha = \alpha(c). \end{gathered} \tag{20}$$

Построим множество

$$G_0 := \left\{(t, x) : \exists c \in G,\ t \in (-\alpha;\ \alpha),\ x = \varphi(t, c)\right\}.$$

Если существует функция $\bar{x} = F(t, x),\ (t, x) \in G_0$, *для которой* $F(t, \varphi(t, c)) \overset{t,c}{\equiv} \varphi(-t, c),\ c \in G,\ t \in (-\alpha;\ \alpha)$, *то эту функцию будем называть* **отражающей функцией семейства (20)**.

Не для каждого семейства (20) существует отражающая функция, не всегда она определяется однозначно.

Наибольший интерес для нас будет представлять тот случай, когда семейство (20) не задано нам непосредственно, а построено по семейству решений некоторой дифференциальной системы). Это семейство решений выделено благодаря каким-то своим свойствам и нам a priori бывает неизвестно.

Для иллюстрации рассмотрим двумерную систему

$$\dot{x} = P(t, x, y),\ \dot{y} = Q(t, x, y) \tag{21}$$

с непрерывно дифференцируемой в $\mathbf{R}^3$ правой частью и решениями $x(t, c_1, c_2),\ y(t, c_1, c_2)$.

Для простоты формулировок, а не выкладок, мы задали систему во всем $\mathbf{R}^3$ и будем считать, что все ее решения продолжимы на $\mathbf{R}$. В качестве семейства (20) возьмем семейство первых компонент $x(t, c_1, c_2)$ решений системы (21) и поставим вопрос: Когда эти компоненты четны по t ? На языке отражающей функции этот вопрос принимает вид: Когда отражающая функция этого семейства может быть задана формулой $\bar{x} = x$?

Ответ на поставленный вопрос дают следующие две теоремы, обеспечивающие необходимые и достаточные условия того, чтобы все $x(t, c_1, c_2)$ были четными.

Теорема 27. *Пусть для системы (21) с непрерывно дифференцируемой правой частью все решения $(x(t), y(t))$ имеют четную первую компоненту $x(t)$. Тогда отражающая функция этой системы имеет вид*

$$(F_1,\ F_2) = (x,\ F(t,x,y)), \tag{22}$$

а для функции F выполнены тождества

$$\begin{gathered}(0,x,y) \equiv y, P(-t,x,F(t,x,y)) + P(t,x,y) \overset{t,x,y}{\equiv} 0,\\ \overline{P_t} - P_t - (P_x + \overline{P_x})P - P_y Q + \overline{P_y}\bar{Q} \overset{t,x,y}{\equiv} 0,\end{gathered} \tag{23}$$

где $P_t = \frac{\partial}{\partial t}P(t,x,y)$, $\overline{P_t} := P_t(-t,x,F(t,x,y))$ и т.п.

Теорема 28. *Пусть для системы (21) с непрерывно дифференцируемой правой частью существует дифференцируемая функция $F(t,x,y)$, удовлетворяющая тождествам (23). И пусть всюду, кроме множества не содержащего внутренних точек $P_y(-t,x,F) \neq 0$. Тогда отражающая функция системы (21) имеет вид (22), а первая компонента любого решения $x(t)$, определенного на симметричном интервале $(-\alpha;\ \alpha)$ четна по t.*

Следствием этих теорем является

Теорема 29. *Пусть выполнены все условия теоремы 27, а система (21) 2ω-периодична по t. Тогда любое решение этой системы, продолжимое на $[-\omega;\ \omega]$, будет 2ω-периодично.*

Теорема 30. *Пусть $V(t,x)$ есть m раз дифференцируемая функция независимых переменных (t,x), для которой в области задания системы (1) выполнено тождество*

$$V^{(m)} \overset{t,x}{\equiv} f(t, V, V^{(1)}, \ldots, V^{(m-1)}), \tag{24}$$

где f есть непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойством

$$f(-t, y_1, -y_2, \ldots, (-1)^{m-1}y_m) \equiv (-1)^m f(t, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

а

$$V^{(k+1)} := \frac{\partial V^{(k)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_i} X_i(t,x).$$

Тогда любое решение $x(t)$ системы (1), для которого

$$V^{(2k-1)}(0; x(0)) = 0,\ k = 1; 2; \ldots, [\frac{m}{2}]$$

удовлетворяет тождеству $V(-t, x(-t)) \overset{t}{\equiv} V(t, x(t))$. (Знак $[\alpha]$ означает целую часть α).

Замечание. Точно так же можно доказать, что если функция f обладает свойством

$$f(-t, -y_1, y_2, \ldots, (-1)^m y_m) = (-1)^{m+1} f(t, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

а $V(t, x)$ удовлетворяет соотношению (24), то для любого решения $x(t)$ системы (1), для которого $V^{(2k)}(0; x(0)) = 0,\ k = 0; 1; \ldots, [\frac{m}{2}]$ будет выполняться тождество $V(-t, x(-t)) \equiv -V(t, x(t))$.

В случае, когда в семействе (20) $m > n$ для него отражающая функция может не существовать. Если, однако, увеличить размерность вектора x, добавив разумным образом новые компоненты $x_k(t; c_1, \ldots, c_m),\ k = \overline{n+1, m}$, то мы получим новое семейство, уже обладающее отражающей функцией. Используя понятие отражающей функции семейства функций, можно получать результаты, подобные нижеследующим.

Теорема 31. *Пусть для дважды дифференцируемых матриц A и B размерности $n \times n$ существуют непрерывные нечетные скалярные функции $\alpha_i(t)$, для которых выражение $M := 2\dot{A} + A^2 - 4B$ удовлетворяет тождеству*

$$2\dot{M} \equiv MA - AM + \sum_{i=0} \alpha_i M^i.$$

Тогда отражающая функция $\bar{x} = F(t)x$ системы $\dot{x} = -0,5A(t)x$ является и отражающей функцией семейства тех решений системы

$$\ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x = 0, x \in \mathbf{R}^n, \tag{25}$$

для которых выполнено условие $2\dot{x}(0) = -A(0)x(0)$. При этом $F(t)$ удовлетворяет соотношениям (38) и начальному условию $F(0) = E$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 27, а 2ω-периодическая система $\dot{y} = -0,5A(t)y$ неустойчива. Тогда 2ω-периодическая система (25) также неустойчива.*

Если система (25) описывает колебания связанных осцилляторов с нестационарными связями, то теорема 31 позволяет выделить подсистему таких колебаний, при которых состояния системы в симметричные моменты времени t и $-t$ совпадают с состояниями некоторой замкнутой системы с меньшим в два раза числом степеней свободы.

Теорема 32. *Пусть для некоторой дифференцируемой функции $F(t, x)$, определенной в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t = 0$, выполнены соотношения*

$$P(-t, F(t, x), x) + Q(t, x, F(t, x)) \equiv 0,$$

$$F_t + F_x P(t, x, F) \equiv Q(t, x, F),\ F(0, x) \equiv x.$$

Тогда для каждого решения $x(t)$, $y(t)$ системы

$$\dot{x} = P(t, x, y),\ \dot{y} = Q(t, x, y), \tag{26}$$

для которого $y(0) = x(0)$, выполнены тождества

$$y(t) \equiv F(t, x(t)) \equiv x(-t).$$

Поэтому, если система (26) – 2ω-периодична по t, то каждое из этих решений будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $F(-\omega, x(\omega)) = x(\omega)$. (Здесь P и Q – функции из $\mathbf{R}^{1+n} \mapsto \mathbf{R}^n$, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши для системы (26)).

Теорема 33. *Пусть $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ и $g : \mathbf{R}^{1+n} \mapsto \mathbf{R}$–непрерывно дифференцируемые функции и g есть 2ω-периодическая по t функция, для которой $g(-t, y, x) + g(t, x, y) \equiv 0$. Тогда каждое $2\alpha\omega$-периодическое решение $z(t)$ системы $\dot{z} = f(z)$ определяет ограниченное решение $x(t)$, $y(t)$; $x(\alpha\omega) = y(-\alpha\omega) = z(0)$, системы $\dot{x} = f(x)(g(t, x, y) + 1)$, $\dot{y} = f(y)(g(t, x, y) - 1)$. Это решение будет $2n\omega$-периодическим, если $\alpha = \frac{m}{n}$ есть несократимая рациональная дробь.*

Теорема 34. *Пусть $P(t)$-непрерывная, а $\triangle(t)$-дифференцируемая на $\mathbf{R}$ матрицы $n \times n$, для которых при некоторых скалярных нечетных функциях $\alpha_k(t)$ выполнено тождество*

$$\frac{d\triangle(t)}{dt} \equiv P(t)\triangle(t) - \triangle(t)P(t) + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t)\triangle^k(t).$$

Тогда все системы вида

$$\frac{dx}{dt} \equiv P(t)x + \sum_{k=0}^{r} \beta_k(t)\triangle^k(t)x,$$

в том числе и система $\frac{dx}{dt} = P(t)x$, при любых нечетных непрерывных скалярных функциях $\beta_k(t)$ и любом $r \in \mathbf{N}$ имеют одну и ту же отражающую функцию $F(t)x$. Отображение за период $[-\omega;\ \omega]$ тех из них, которые 2ω-периодичны, совпадает с отображением $x \mapsto F(-\omega)x$.

Нами изложен метод исследования систем дифференциальных уравнений, представляющий собой объединение метода отражающей функции с методом малого параметра. С его помощью доказывается

Теорема 35. *Пусть для системы*

$$\begin{gathered} \tfrac{dx}{dt} = P\left(t, x, y, \epsilon\right), \quad \tfrac{dy}{dt} = Q\left(t, x, y, \epsilon\right), \\ t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in G \subset \mathbb{R}, \quad \epsilon \in [\epsilon_0; \epsilon_0] \end{gathered} \tag{27}$$

с непрерывными по всем своим аргументам функциями P, Q, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и решениями $x = \varphi\left(t; t_0; x_0; y_0; \epsilon\right)$, $y = \psi\left(t; t_0; x_0; y_0; \epsilon\right)$ выполнены условия:

1) функции P и Q суть $2\omega-$периодические по t;

2) переопределенная относительно Φ система

$$Q(-y, \Phi, -y, \epsilon) = Q(t, x, y, \epsilon),$$

$$\tfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} P(t, x, y, \epsilon) + \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} Q(t, x, y, \epsilon) + P(-t, \Phi, -y, \epsilon) = 0$$

имеет решение $\Phi = \Phi(t, x, y, \epsilon)$ $\quad t \in [-\omega; \omega]$, $\quad x \in D$, $\quad y \in G$, для которого $\Phi(0, x, 0, \epsilon) \equiv \Phi(\omega; x, 0, \epsilon) \equiv x$, $\quad x \in D$;

3) при значении параметра $\epsilon = 0$ система (27) имеет семейство продолжимых на $[0; \omega]$ решений

$$x = \varphi(t; 0, x_0(s), 0, 0), \quad y = \psi(t; 0, x_0(s), 0, 0), \quad s \in [s_1, s_2],$$

начинающихся при $t = 0$ на непрерывной кривой $\mathrm{K} : x_0 = x_0(s)$, $\quad y_0 = 0$, для которых функция $\psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0)$ на концах отрезка $[s_1; s_2]$ принимает значения разных знаков.

Тогда система (27) при достаточно малых $|\epsilon|$ имеет хотя бы одно $2\omega-$периодическое решение вида

$$x = \varphi(t; 0, x_0(s), 0, \epsilon), \quad y = \psi(t; 0, x_0(s), 0, \epsilon) \quad s \in [s_1, s_2].$$

Если, к тому же, $\frac{\partial}{\partial s}\psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0)$ не меняет на $[s_1; s_2]$ знака, то такое $2\omega-$периодическое решение единственно.

Пример 1 Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x,\ \dot{x},\ t,\ \epsilon), \quad a \neq \frac{\pi^2 k^2}{\omega^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ax + e(t) + f(x,\ y,\ t,\ \epsilon).$$

Будем считать, что непрерывно дифференцируемая 2ω - периодическая по t функция f удовлетворяет условиям

$$f(x, -y, -t, \epsilon) \equiv f(x, y, t, \epsilon),$$

$$(t, x, y, 0) \equiv 0,$$

а $e(t)-$четная непрерывная $2\omega-$периодическая функция. Тогда условия теоремы 35 выполняются при $\Phi \equiv x$. При $\epsilon = 0$ система вырождается в линейную систему, для которой при $a > 0$ указанное в теореме семейство решений имеет вид

$$\begin{aligned} x &= s\cos\sqrt{a}t - \tfrac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{a}}\sin\sqrt{a}t + \varphi(t), \\ y &= -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}t - \dot{\varphi}(0)\cos\sqrt{a}t + \dot{\varphi}(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ −единственное $2\omega-$периодическое решение уравнения $\ddot{x}+ax=e(t)$, $x_0(s)=s+\varphi(0)$. Функция

$$\psi(\omega;0,x_0(s),0,0)\equiv -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\omega-\dot{\varphi}(0)\cos\sqrt{a}\omega+\dot{\varphi}(\omega)\equiv$$
$$\equiv -s\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\omega-\dot{\varphi}(0)\cos\sqrt{a}\omega+\dot{\varphi}(\omega)$$

принимает значения разных знаков на концах любого отрезка, содержащего точку $s=[\dot{\varphi}(0)\cos\sqrt{a}\omega+\dot{\varphi}(\omega)]/\sqrt{a}\sin\sqrt{\alpha}$. Поэтому при $a>0$ выполнены все условия теоремы 35, а рассматриваемое уравнение второго порядка имеет при достаточно малых ϵ единственное $2\omega-$периодическое решение указанного в теореме вида. При $a<0$ условия теоремы также выполнены.

В работах приведено много примеров уравнений и систем, для которых отражающая функция может быть найдена в явном виде. Естественно, что в общем случае искать отражающую функцию в квадратурах или элементарных функциях нецелесобразно. Тем не менее, можно попытаться найти отражающую функцию изучаемой системы (1), заранее задавшись видом этой функции.

Наряду с системой (1) будем теперь рассматривать систему

$$\dot{y}=X(0,y). \tag{28}$$

Нам уже известно, что если отражающая функция системы (1) совпадает с отражающей функцией некоторой стационарной системы, то эта стационарная система обязана совпадать с системой (28).

В случае совпадения отражающих функций систем (1) и (28) и 2ω-периодичности системы (1) отображения за период систем (1) и (28) также совпадают. Поэтому при $t=\omega$ совпадают начальные данные 2ω-периодических решений этих систем и характер устойчивости соответствующих 2ω-периодических решений этих систем.

Предположим, что нам удалось найти m первых интегралов $U(t,y)=(U_1(t,y),...,U_m(t,y))$ системы (28).

Теорема 36. *Пусть справедливы тождества*

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial U_i}{\partial x}(t,x)X(t,x)\equiv f_i(t,U(t,x)),\quad i=\overline{1;m},$$

и пусть $F(t,z)$ есть отражающая функция системы

$$\frac{dz_i}{dt}=f_i(t,z_1,\ldots,z_m),\quad i=\overline{1;m}.$$

Тогда для отображения $x\mapsto T(x)$ за период $[-\omega;\ \omega]$ 2ω-периодической системы (1) верно соотношение

$$U(\omega,T(x))\equiv F(-\omega,U(-\omega,x)). \tag{29}$$

В качестве функций $U(t,x)$ могут быть взяты произвольные дифференцируемые функции. Если этих функций имеется $m=n$ и $\det \frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$, то соотношение (29) позволяет найти отображение за период системы (1).

Если первый интеграл $U_1(t,y)$ есть интеграл энергии для системы (28), а первое из соотношений (29) имеет вид $U_1(\omega, T(x)) \equiv U_1(-\omega, x)$ то из условий теоремы 36 следует, что за период $[-\omega;\ \omega]$ система (1) восстанавливает свои энергетические ресурсы.

Условия теоремы 36, как следует из ее доказательства, гарантируют нам выполнение тождеств $U(-t, x(-t)) \equiv F(t, U(t, x(t)))$, которые могут быть использованы при решении краевых задач вида $\Phi(x(\alpha), x(-\alpha)) = 0$.

При решении конкретных задач нас может интересовать вопрос: Будет ли отображение за период $[-\omega;\ \omega]$ сохранять конкретные множества фазового пространства (например, шары или их пересечения) границы которых задаются с помощью некоторой функции $U(x)$. В этом случае целесообразно вычислить производные $U^{(k)}(t,x)$, $k=\overline{1;n}$, этой функции в силу системы и воспользоваться теоремой 36.

Теорема 37. *Пусть* $S(t,x) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(t,x)$ *есть дифференцируемая функция, для которой выполнено тождество* $S^{(n)} \equiv \varphi\left(t, S, S^{(1)}, \ldots, S^{(n-1)}\right)$, *где* $S^{(k)} := S^{(k)}(t,x,)$, $k=\overline{1;n}$, *есть производные от* S *в силу системы (1), а функция* φ *обладает свойством*

$$\varphi\left(-t, -S, S^{(1)}, -S^{(2)}, \ldots, (-1)^n S^{(n-1)}\right) \equiv (-1)^{n+1}\varphi\left(t, S, S^{(1)}, \ldots, S^{(n-1)}\right).$$

Пусть, кроме того, $S(0,x) \equiv S^2(0,x) \equiv \ldots \equiv S^{2r}(0,x) \equiv 0$, r *- целая часть от* $n/2$. *Тогда отображение за период* $[-\omega;\ \omega]$ *для системы (1) сохраняет площади.*

Предыдущие рассмотрения убедили нас в том, что применение функции $F(t,x)$, удовлетворяющей основному соотношению и названной отражающей, значительно облегчает исследование системы (1). Однако найти эту отражающую функцию, за редкими, но важными исключениями, невозможно. Исследования показали, что иногда целесообразно использовать функции, которые, не удовлетворяя основному соотношению, удовлетворяют тем не менее некоторому неравенству, левая часть которого совпадает с левой частью основного соотношения.

Пусть, как обычно, $x^T = (x_1, ..., x_n), y^T = (y_1, ..., y_n)$. Символом $x < y$ будем обозначать совокупность строгих неравенств $x_k < y_k, k = \bar{1;n}$; символом $x \leq y$ совокупность нестрогих неравенств $x_k \leq y_k, k = \bar{1;n}$; а символ $x \leq^i y$ будет означать выполнение неравенства $x_k \leq y_k$ для всех $k \neq i$ и $x_i = y_i$.

Соответствующее значение имеют символы $x > y$ и $x \leq^i y$.

Теорема 38. *Пусть для системы (1) с непрерывно дифференцируемой правой частью указана дифференцируемая функция* $F(t,x)$, *для ко-*

торой выполнено неравенство

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) < 0,$$

а функция $X(t,x)$ *удовлетворяет условию*

$$X(-t,x) \leq^i X(-t,y), t \in [0;]$$

При $x \leq y$. *Тогда для любого продолжимого на* $[-\omega;\omega]$ *решения* $x(t)$ *системы (1) справедливо неравенство* $F(\omega; x(\omega)) < x(-\omega)$.

Теорема 39. *Пусть для системы (1) с непрерывно дифференцируемой правой частью указана дифференцируемая функция* $F(t,x)$, *для которой выполнено неравенство* $F(0,x) \leq x$ *и при всех* $t \in [o;\omega]$ *выполнено неравенство*

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) \leq 0,$$

а функция $X(t,x)$ *удовлетворяет условию* $X(-t,x) \geq^i X(-t,y)$ *при* $t \in (0;\omega)$ *и* $x \leq^i y$. *Тогда для любого продолжимого на* $[-\omega;\omega]$ *решения* $x(t)$ *системы (1) справедливо неравенство* $F(\omega, x(\omega)) < x(-\omega)$.